1. Предприятие выпускает продукцию четырех видов П1-П4, для изготовления которой используются ресурсы трех видов: трудовые, сырье и оборудование. Нормы расхода каждого вида ресурса на изготовление единицы каждого вида продукции приведены в таблице.

Таблица: Нормы расхода ресурсов на выпуск единицы продукции

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Ресурс | Вид продукции | Объем ресурса |
| П1 | П2 | П3 | П4 |
| Трудовой | 1 | 1 | 1 | 1 | 16 |
| Сырье | 6 | 5 | 4 | 3 | 110 |
| Оборудование | 4 | 6 | 10 | 13 | 100 |
| Цена | 60 | 70 | 120 | 130 |  |

Прибыль получаемая от реализации единицы продукции, равна: для продукции П1 – 60 у.е., для П2 – 70 у.е., для П3 – 120 у.е., для П4 – 130 у.е. Определить оптимальный план производства каждого вида продукции, максимизирующий прибыль данного предприятия.

**Решение**.
Обозначим через x1..x4 число изготавливаемых продуктов. Тогда условие задачи может быть записано в следующем виде:

$$60x\_{1}+70x\_{2}+120x\_{3}+130x\_{4}\rightarrow max$$

$$x\_{1}+x\_{2}+x\_{3}+x\_{4}\leq 16$$

$$6x\_{1}+5x\_{2}+4x\_{3}+3x\_{4}\leq 110$$

$$4x\_{1}+6x\_{2}+10x\_{3}+13x\_{4}\leq 100$$

$$x\_{1}\geq 0$$

$$x\_{2}\geq 0$$

$$x\_{3}\geq 0$$

$$x\_{4}\geq 0$$

Припишем каждому из видов сырья, используемых для производства продукции, двойственную оценку, соответственно равную y1, y2 и у3. Тогда общая оценка сырья, используемого на производство продукции, составит.

$$16y\_{1}+110y\_{2}+100y\_{3}\rightarrow min$$

$$y\_{1}+6y\_{2}+4y\_{3}\geq 60$$

$$y\_{1}+5y\_{2}+6y\_{3}\geq 70$$

$$y\_{1}+4y\_{2}+10y\_{3}\geq 120$$

$$y\_{1}+3y\_{2}+13y\_{3}\geq 130$$

$$y\_{1}\geq 0$$

$$y\_{2}\geq 0$$

$$y\_{3}\geq 0$$

Как видно, данные задачи образуют симметричную пару двойственных задач. Решение прямой задачи дает оптимальный план производства изделий, а решение двойственной – оптимальную систему оценок сырья, используемого для производства этих изделий. Чтобы найти решение этих задач, следует сначала отыскать решение какой–либо одной из них.

Приведем математическую модель задачи к каноническому виду. Для этого избавимся от знаков неравенств посредством ввода дополнительных переменных и замены знака неравенства на знак равенства. Дополнительная переменная добавляется для каждого неравенства, причем эта переменная указывается в целевой функции с нулевым коэффициентом. Правило ввода дополнительных переменных: при ">=" - переменная вводится в неравенство с коэффициентом (-1); при "<=" - с коэффициентом (+1).

$$60x\_{1}+70x\_{2}+120x\_{3}+130x\_{4}-0x\_{5}-0x\_{6}-0x\_{7}\rightarrow max$$

$$x\_{1}+x\_{2}+x\_{3}+x\_{4}+x\_{5}=16$$

$$6x\_{1}+5x\_{2}+4x\_{3}+3x\_{4}+x\_{6}=110$$

$$4x\_{1}+6x\_{2}+10x\_{3}+13x\_{4}+x\_{7}=100$$

Экономический смысл введенных дополнительных переменных - остатки соответствующих ресурсов каждого вида. Для решения задачи составим симплекс-таблицу.

Симплекс-таблица составляется так:

В графе "Базис" записываются вектора переменных, принимаемые за базисные. На первом этапе это – A5, A6, A7. Базисными будут переменные, каждая из которых входит только в одно уравнение системы, и нет такого уравнения, в которое не входила бы хотя бы одна из базисных переменных.
         В следующий столбец  записываются коэффициенты целевой функции, соответствующие каждой переменной. Столбец В – столбец свободных членов. Далее идут столбцы коэффициентов Аi при  i –й переменной.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| i | Базис | С | В | А1 | А2 | А3 | А4 | А5 | А6 | А7 |
| 1 | А5 | 0 | 16 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 2 | А6 | 0 | 110 | 6 | 5 | 4 | 3 | 0 | 1 | 0 |
| 3 | А7 | 0 | 100 | 4 | 6 | 10 | 13 | 0 | 0 | 1 |
| 4 | Fi-Ci |   | 0 | -60 | -70 | -120 | -130 |   |   |   |

Следует отметить, что оценки для базисных векторов всегда равны нулю.

Преобразование симплекс-таблицы ведется следующим образом:
**Шаг 1**: Проверяется критерий оптимальности, суть которого состоит в том, что все оценки  должны быть неотрицательны. В нашем случае этот критерий не выполнен, поэтому переходим ко второму шагу.
**Шаг 2**: Для отрицательных оценок вычисляются величины:

$$θ\_{1}=min\left\{\frac{B\_{i}}{A\_{i}}\right\}=min\left\{\frac{16}{1};\frac{110}{6};\frac{100}{4}\right\}=min\left\{16;18.3;25\right\}=16$$

$$θ\_{2}=min\left\{\frac{B\_{i}}{A\_{i}}\right\}=min\left\{\frac{16}{1};\frac{110}{5};\frac{100}{6}\right\}=min\left\{16;22;16.7\right\}=16$$

$$θ\_{3}=min\left\{\frac{B\_{i}}{A\_{i}}\right\}=min\left\{\frac{16}{1};\frac{110}{4};\frac{100}{10}\right\}=min\left\{16;27.5;10\right\}=10$$

$$θ\_{4}=min\left\{\frac{B\_{i}}{A\_{i}}\right\}=min\left\{\frac{16}{1};\frac{110}{3};\frac{100}{13}\right\}=min\left\{16;36.7;7.7\right\}=7.7$$

$$θ\_{1}\left(F\_{1}-C\_{1}\right)=16\*\left(-60\right)=-960$$

$$θ\_{2}\left(F\_{2}-C\_{2}\right)=16\*\left(-70\right)=-1120$$

$$θ\_{3}\left(F\_{3}-C\_{3}\right)=10\*\left(-120\right)=-1200$$

$$θ\_{4}\left(F\_{4}-C\_{4}\right)=7.7\*\left(-130\right)=-1001$$

Из этих элементов выбирается тот, для которого вычисленное произведение минимально, в нашем случае  минимально -1200, поэтому выбираем третий столбец, а в качестве так называемого разрешающего элемента выбирается первый элемент третьего столбца (по значению Θ3) – 1 (выделен в таблице).